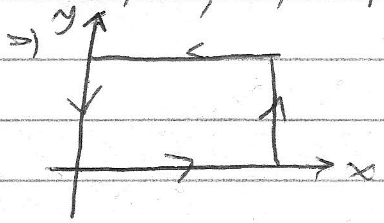
10/05/16

Σχετικά με τον προσανατολισμό:

① Αν $\bar{\gamma}$ κανονική $\Rightarrow$ δίνεται από το $\bar{\gamma}'(t)\neq 0, \forall t\in[\alpha,\beta]$

② Πολλές φορές δίνεται περιγραφικά για ένα $C\subset\mathbb{R}^n$ κ' εννοείται ότι θεωρούμε απλή καμπύλη με $\bar{\gamma}([\alpha,\beta]) = C$

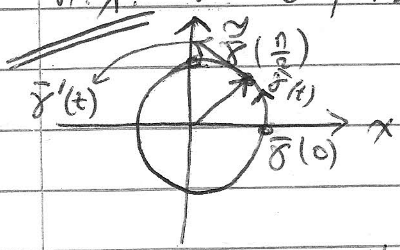
π.χ. Έστω η $\bar{\gamma}$ η οποία διέρχεται από τα $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ με αυτή τη σειρά $\Rightarrow$



③ Σε μια απλή κλειστή $C\subset\mathbb{R}^2$ διακρίνουμε δύο προσανατολισμούς. Λέμε ότι η $\bar{\gamma}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ περιγράφει το C με θετικό προσανατολισμό αν όπως κινούμαστε το εσωτερικό της C βρίσκεται αριστερά μας. (αντίστροφα για τον αρνητικό προσανατολισμό).

3α) Αν C: απλή κλειστή κ' κανονική μπορούμε να βρούμε πιο είναι ο θετικός προσανατολισμός ~~το εσωτερικό~~ αν στρίψουμε το διάνυσμα ταχ. $\bar{\gamma}'(t)\neq 0, \forall t$ της κανονικής απλής κλειστής παραμετροποίησης $\bar{\gamma}$ προς τα αριστερά, δηλαδή θεωρήσουμε το διάνυσμα $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\bar{\gamma}'(t)$ και δούμε ότι αυτό δείχνει προς το εσωτερικό (βλ. π.χ.)

π.χ. $\bar{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ απλή κλειστή.



$\bar{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = -\bar{\gamma}(t)$ το οποίο δείχνει προς

(επίσης $\bar{\gamma}(t) \cdot \bar{\gamma}'(t) = 0$) το εσωτερικό

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ του κύκλου.

Διακρίνουμε (από τις διάφορες) την παραμετρικοποίηση ως προς μήκος καμπύλης (δηλ. η παράμετρος θα είναι το μήκος της καμπύλης που έχουμε διανύσει).

Ορισμός: Έστω μία κανονική καμπύλη $\bar{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $s(t) = \int_\alpha^t \|\bar{\gamma}'(\tau)\| d\tau$ ονομάζεται συνάρτηση μήκους τόξου της $\bar{\gamma}$.

Πρόταση: Η αντίστροφη $s^{-1} : [0, L(\bar{\gamma})] \to [\alpha, \beta]$ της συνάρτησης μήκους τόξου μιας κανονικής καμπύλης $\bar{\gamma}$, είναι ένας C^1-παραμετρικός μετασχηματισμός, που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Απόδ: $s(t) = \int_\alpha^t \|\bar{\gamma}'(\tau)\| d\tau \Rightarrow s'(t) = \|\bar{\gamma}'(t)\| > 0, \ \forall t \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists s^{-1} : [0, L(\bar{\gamma})] \to [\alpha, \beta]$ και

$$(s^{-1})'(\tau) = \frac{1}{s'(s^{-1}(\tau))}$$

Ορισμός: Έστω $\bar{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ κανονική καμπύλη με συνάρτηση μήκους τόξου $s : [\alpha, \beta] \to [0, L(\bar{\gamma})] = \int_\alpha^t \|\bar{\gamma}'(\tau)\| d\tau$ τότε η καμπύλη $\bar{\tilde{\gamma}}(\tau) = \bar{\gamma}(s^{-1}(\tau))$, $\tau \in [0, L(\bar{\gamma})]$ ονομάζεται αναπαραμετρικοποίηση της $\bar{\gamma}$ ως προς μήκος τόξου, και λέμε ότι η $\bar{\tilde{\gamma}}([0, L(\bar{\gamma})]) = \bar{\gamma}([\alpha, \beta]) =$

$= C \subset \mathbb{R}^n$

είναι παραμετρικοποιημένη ως προς μήκος τόξου.

Πρόταση: Έστω $\bar{\gamma}: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ κανονική. Η αναπαραμετρικοποίηση ~~ως~~ ως προς μήκος τόξου $\bar{\delta} = \bar{\gamma} \circ s^{-1}$ έχει σε κάθε σημείο μοναδιαία ταχύτητα δηλ. $\|\bar{\delta}'(\tau)\| = 1, \forall \tau$ $(\tau \in [0, L(\bar{\gamma})])$ και αντίστοιχα μία κανονική καμπύλη με μοναδιαία ταχ. είναι παραμετρικοποιημένη ως προς μήκος τόξου.

$$s(t) = \int_\alpha^t \|\bar{\gamma}'(\tau)\| d\tau \underset{\|\bar{\gamma}'(\tau)\|=1}{=\!=\!=} t - \alpha \left(\underset{\alpha = 0}{=\!=} t \right)$$

Αποδ: $(\Leftarrow)$ ✓

$(\Rightarrow)$ $\bar{\delta}'(\tau) = \bar{\gamma}'(s^{-1}(\tau))(s^{-1})'(\tau) =$ $\rightarrow \dfrac{1}{s'(s^{-1}(\tau))} = \dfrac{1}{\gamma'(s^{-1}(\tau))}$

$$= \frac{\gamma'(s^{-1}(\tau))}{\gamma'(s^{-1}(\tau))} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\bar{\delta}'(\tau)\| = 1}$$

Δοκιμή: $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow \bar{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\bar{\gamma}'(t)\| = 1, \quad t \in [0, 2\pi]$.

$$s(t) = \int_0^t \|\bar{\gamma}'(\tau)\| d\tau = t$$

Παρατήρηση (Πρακτική): Μία καμπύλη $\bar{\gamma}: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρ/θεί ως προς οποιοδήποτε άλλο διάστημα $[A, B]$ μέσω των C^1-παρ. μετασχ.

$\varphi(\tau) = \dfrac{\alpha B - \beta A}{B - A} + \dfrac{\beta - \alpha}{B - A}\tau, \quad \tau \in [A, B]$ και

$\varphi(\tau) = \dfrac{\beta B - \alpha A}{B - A} - \dfrac{\beta - \alpha}{B - A}\tau, \quad \tau \in [A, B]$

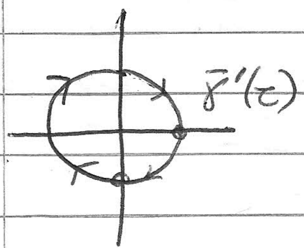
όπου φ: διατηρεί, φ: αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Ορισμός: Έστω $\bar{\gamma}: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$. Τότε η καμπύλη
$\bar{\gamma}^-(\tau) = \bar{\gamma}(\alpha + \beta - \tau), \tau \in [\alpha, \beta]$ ονομάζεται αντίθετη/ /αντίστροφη καμπύλη της $\bar{\gamma}$.

$\bar\gamma(\alpha)=\bar\gamma^-(\beta) \longrightarrow \bar\gamma(\beta)=\bar\gamma^-(\alpha)$, $(\bar\gamma^-)'(\tau)=-\bar\gamma'(\alpha+\beta-\tau)$

π.χ. $\bar\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

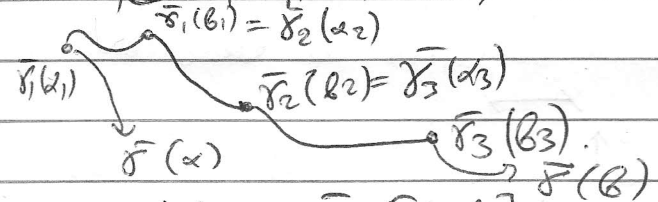
$$\bar\gamma^-(\tau)=(\underbrace{\cos(2\pi-\tau)}_{\cos 2\pi\cos\tau+\sin 2\pi\sin\tau=\cos\tau},\underbrace{\sin(2\pi-\tau)}_{\sin 2\pi\cos\tau-\sin\tau\cos 2\pi=-\sin\tau})=(\cos\tau,-\sin\tau)$$

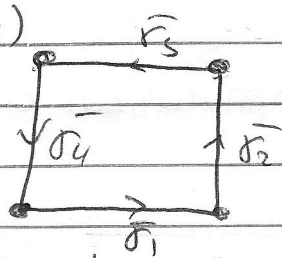


«Ένωση» Καμπυλών.

Ορισμός: Έστω $\bar\gamma_i:[\alpha_i,\beta_i]\to\mathbb{R}^n$ $i=1,\dots,k$ με $\bar\gamma_i(\beta_i)=\bar\gamma_{i+1}(\alpha_{i+1})$

δηλ.





Τότε η καμπύλη $\bar\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ με $\alpha=\alpha_1$ και $\beta=\alpha_1+\sum_{i=1}^{k}(\beta_i-\alpha_i)$ και $\bar\gamma(\tau)=\bar\gamma_i(\tau+c_i)$, $\forall\tau\in[d_i,e_i]$, $i=1,\dots,k$. ονομάζεται ένωση των καμπυλών $\bar\gamma_i$ και συμβολίζεται με $\bar\gamma=\bar\gamma_1\oplus\dots\oplus\bar\gamma_k$ και αντίστοιχα για τις εικόνες έχουμε $C=C_1\oplus\dots\oplus C_k$.

Η $\bar\gamma$ ονομάζεται κατά τμήματα κανονική αν οι $\bar\gamma_i$ είναι κανονικές.

π.χ.: Αν $\bar\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ κανονική και πάρουμε μια διαμέριση $\alpha=t_0<t_1<\dots<t_k=\beta$ του $[\alpha,\beta]$, έχουμε: $\bar\gamma=\bar\gamma_1\oplus\dots\oplus\bar\gamma_k$ όπου $\bar\gamma_i=\bar\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$, $i=1,\dots,k$.

Ορισμός: Έστω $\bar\gamma=\bar\gamma_1\oplus\dots\oplus\bar\gamma_k:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη. Τότε $L(\bar\gamma)=\sum_{i=1}^{k}L(\bar\gamma_i)$ ονομάζεται μήκος της $\bar\gamma$.

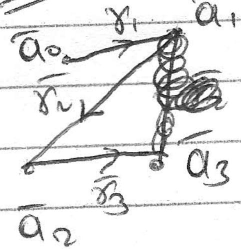
$$L(\bar\gamma_i)=\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\|\bar\gamma_i'(t)\|dt$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\|\bar\gamma'(t)\|dt=\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\bar\gamma_i'(t)\|dt=\sum_{i=1}^{k}L(\bar\gamma_i)$$

Π.χ. Έστω $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $i=0,\dots,k$, με $\bar{a}_{i-1} \neq \bar{a}_i$, $\forall i=1,\dots,k$

και $\bar{\gamma}_i(t) = \bar{a}_{i-1} + t(\bar{a}_i - \bar{a}_{i-1})$

$t \in [0,1]$



Τότε η ένωση $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_k$ είναι η πολυγωνική γραμμή /καμπύλη που ενώνει τα σημεία $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_k$ (με αυτή τη σειρά)

Μία πολυγωνική γραμμή είναι προφανώς κατά τμήματα κανονική με μήκος $L(\bar{\gamma}) = \sum_{i=1}^{k} L(\bar{\gamma}_i) = \sum_{i=1}^{k} \|\bar{a}_i - \bar{a}_{i-1}\|$

Άσκηση: Έστω $U = (a,b) \times (c,d)$ με ($a<b$, $c<d$) $\in \mathbb{R}$.

Βρείτε το ∂U και περιγράψτε το με θετικό προσανατολισμό με μία καμπύλη $\bar{\gamma}$ η οποία μπορεί να είναι ένωση καμπυλών και υπολογίστε το μήκος του ∂U.